

УДК 517.925
doi:10.21685/2072-3040-2021-4-1

О бифуркациях букета из двух периодических траекторий кусочно-гладкой динамической системы с центральной симметрией

В. Ш. Ройтенберг

Ярославский государственный технический университет, Ярославль, Россия
vroitenberg@mail.ru

Аннотация. *Актуальность и цели.* Описанию бифуркации в типичных семействах кусочно-гладких динамических систем на плоскости посвящено значительное число научных работ. Хотя в прикладных задачах часто встречаются динамические системы с симметрией, бифуркации кусочно-гладких систем с симметрией исследованы мало. Поэтому рассмотрение бифуркаций в типичных семействах таких динамических систем представляет несомненный интерес. *Материалы и методы.* Применяются методы качественной теории дифференциальных уравнений. Исследуется поведение функций последования и функций расхождения при разных значениях параметров. При этом используются оценки производных локальных функций соответствия по траекториям в точках касания траекторий линии разрыва векторного поля. *Результаты.* Рассматривается кусочно-гладкое векторное поле X на плоскости, «сшитое» из гладких векторных полей, заданных соответственно в верхней и нижней полуплоскостях и имеющих периодические траектории, касающиеся оси x , инвариантное при преобразовании симметрии относительно начала координат. Букет Γ , составленный из указанных периодических траекторий, является периодической траекторией поля X . Для двухпараметрического семейства общего положения, являющегося деформацией поля X в пространстве кусочно-гладких векторных полей с центральной симметрией, описываются бифуркации в окрестности U контура Γ . Получена бифуркационная диаграмма – разбиение окрестности нуля на плоскости параметров на классы топологической эквивалентности в U векторных полей семейства. *Выводы.* Описаны типичные двухпараметрические бифуркации в окрестности рассматриваемого букета периодических траекторий.

Ключевые слова: кусочно-гладкое векторное поле, симметрия, периодическая траектория, бифуркация, бифуркационная диаграмма

Для цитирования: Ройтенберг В. Ш. О бифуркациях букета из двух периодических траекторий кусочно-гладкой динамической системы с центральной симметрией // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. 2021. № 4. С. 3–16. doi:10.21685/2072-3040-2021-4-1

On the bifurcations of two periodic trajectories of a piecewise-smooth dynamical system with central symmetry

V.Sh. Roytenberg

© Ройтенберг В. Ш., 2021. Контент доступен по лицензии Creative Commons Attribution 4.0 License / This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 License.

Yaroslavl State Technical University, Yaroslavl, Russia
vroitenberg@mail.ru

Abstract. *Background.* A large number of scientific works are devoted to the description of bifurcations in generic families of piecewise-smooth dynamical systems on the plane. Although dynamical systems with symmetry are often encountered in applied problems, the bifurcations of piecewise-smooth systems with symmetry have been studied not enough. Therefore, the consideration of bifurcations in generic families of such dynamical systems is of undoubted interest. *Materials and methods.* The methods of the qualitative theory of differential equations are applied. The behavior of the Poincaré mappings and the corresponding divergence functions for different values of the parameters is investigated. We used estimates for the derivatives of local correspondence functions along trajectories at the points of tangency of the trajectories with the line of discontinuity of the vector field. *Results.* We consider a piecewise-smooth vector field X on a plane, “sewn” from smooth vector fields specified in the upper and lower half-planes, respectively, and having periodic trajectories tangent to the x -axis, which is invariant under symmetry transformation about the origin. The bouquet Γ , composed of the indicated periodic trajectories, is a periodic trajectory of the field X . For a two-parameter family in general position, which is a deformation of the field X in the space of piecewise-smooth vector fields with central symmetry, bifurcations are described in a neighborhood U of the contour Γ . The bifurcation diagram is obtained – a partition of a neighborhood of zero in the parameter planes into topological equivalence classes in U of vector fields of the family. *Conclusions.* Generic two-parameter bifurcations in a neighborhood of the considered bouquet of periodic trajectories are described.

Keywords: piecewise smooth vector field, symmetry, periodic trajectory, bifurcation, bifurcation diagram

For citation: Roytenberg V.Sh. On the bifurcations of two periodic trajectories of a piecewise-smooth dynamical system with central symmetry. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiziko-matematicheskie nauki* = *University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences*. 2021;(4):3–16. (In Russ.). doi:10.21685/2072-3040-2021-4-1

Введение

Бифуркации кусочно-гладких динамических систем на плоскости изучались в большом числе работ. Их обзор имеется в [1–4]. Динамические системы, используемые при моделировании различных процессов, часто имеют центральную симметрию. Описание бифуркации в типичных однопараметрических семействах кусочно-гладких динамических систем с такой симметрией следует из описания однопараметрических и некоторых двухпараметрических бифуркаций общих кусочно-гладких динамических систем. Представляет интерес и изучение бифуркации в типичных двухпараметрических семействах в пространстве кусочно-гладких динамических систем с центральной симметрией. В статье [5] исследованы бифуркации кусочно-гладких систем, инвариантных при симметрии плоскости относительно начала координат, в окрестности контура Γ , составленного из двух симметричных периодических траекторий Γ^+ и Γ^- , проходящих через начало координат и имеющих в начале координат точку возврата.

Здесь рассматривается случай, когда периодические траектории Γ^+ и Γ^- гладкие и касаются линии разрыва поля – оси x – в начале координат.

1. Постановка задачи и результаты

Пусть X^+ и X^- – векторные поля класса C^r ($r \geq 2$) соответственно в $\mathbf{R}_+^2 := \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : y \geq 0\}$ и $\mathbf{R}_-^2 := \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : y \leq 0\}$ такие, что преобразование центральной симметрии $S: (x, y) \mapsto (-x, -y)$ переводит поле X^- в поле X^+ , т.е. $\forall (x, y) \in \mathbf{R}_-^2 \quad X^-(x, y) = -X^+(-x, -y)$. Они определяют кусочно-гладкое векторное поле $X = (X^+, X^-)$ на $\mathbf{R}^2$ [5]. Пусть X_S^r – множество всех таких векторных полей.

Рассмотрим семейство векторных полей $X_\varepsilon(x, y) = (X_\varepsilon^+, X_\varepsilon^-) \in X_S^r$, зависящих от двумерного параметра $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$. Пусть $X_\varepsilon^\pm(x, y) = (P^\pm(x, y, \varepsilon), Q^\pm(x, y, \varepsilon))$, где функции $P^\pm$ и $Q^\pm$ принадлежат классу C^r . Будем считать, что поле $X_0 = (X_0^+, X_0^-)$ удовлетворяет следующим условиям:

$$\text{C1. } P^+(0, 0, 0) > 0, \quad Q^+(0, 0, 0) = 0, \quad (Q^+)'_x(0, 0, 0) > 0.$$

C2. Через точку $O = (0, 0)$ проходит периодическая траектория Γ^+ векторного поля X_0^+ , пересекающаяся с границей полуплоскости $\mathbf{R}_+^2$ (осью x) только в точке O .

В силу симметрии $\Gamma^- = S\Gamma^+$ – периодическая траектория векторного поля X_0^- . Вследствие условий C1 Γ^+ и Γ^- касаются оси x в точке O . Букет $\Gamma = \Gamma^+ \cup \Gamma^-$ можно рассматривать как периодическую траекторию поля X_0 с любым периодом nT , где T – период Γ^+ и Γ^- ; $n = 2, 3, \dots$

Из условий C1 следует, что существует такое число $x_* > 0$, что при значениях ε , достаточно близких к нулю,

$$\forall \varepsilon \in (-x_*, x_*) \quad P^+(x, 0, \varepsilon) > 0,$$

$$(Q^+)'_x(x, 0, \varepsilon) > 0, \quad \text{sgn } Q^+(x, 0, \varepsilon) = \text{sgn}(x - v_1(\varepsilon)), \quad (1)$$

где $v_1(\cdot)$ – C^r -функция со значениями в $(-x_*, x_*)$, $v_1(0) = 0$.

Пусть $\eta: (-1, 1) \rightarrow \text{int } \mathbf{R}_+^2$ – такое C^∞ -отображение, что $\forall u \in (-1, 1)$ $\eta'(u) \neq 0$, дуга $\eta(-1, 1)$ и Γ^+ пересекаются в единственной точке $\eta(0)$, причем репер $(\eta'(0), X_0^+(\eta(0)))$ имеет положительную ориентацию. При значениях ε , достаточно близких к нулю, положительная (отрицательная) полутраектория векторного поля X_ε^+ , начинающаяся в точке $O_\varepsilon^+ = (v_1(\varepsilon), 0)$, пересекает дугу $\eta(-1, 1)$ в точке $\eta(v_2^+(\varepsilon))$ ($\eta(v_2^-(\varepsilon))$), где $v_2^\pm(\cdot) \in C^r$, $v_2^\pm(0) = 0$. Обозначим $v_2(\varepsilon) := v_2^+(\varepsilon) - v_2^-(\varepsilon)$. Будем предполагать, что выполняется условие

С3. $\det(\partial v_i(0) / \partial \epsilon_j) \neq 0$.

Сделав C' -замену параметров и вернувшись к их прежним обозначениям, мы можем в дальнейшем считать, что при некотором $\delta_1 > 0$

$$\forall \epsilon = (\epsilon_1, \epsilon_2) \in (-\delta_1, \delta_1)^2 \quad v_1(\epsilon) = \epsilon_1, \quad v_2(\epsilon) = \epsilon_2. \quad (2)$$

Мы можем выбрать $\bar{v} > 0$ и $\delta_2 \in (0, \delta_1]$ так, что $\forall \epsilon \in (-\delta_2, \delta_2)^2$ $-\bar{v} < v_2^-(\epsilon) < 0$ и на дуге $\eta[-\bar{v}, v_2^-(\epsilon)]$ определено отображение последования $\eta(v) \mapsto \eta(f_\epsilon^-(v))$ по траекториям векторного поля X_ϵ^+ такое, что $f_\epsilon^-(v)$, и $(f_\epsilon^-)'(v)$ непрерывно зависят от (v, ϵ) , $(f_\epsilon^-)'(u) > 0$, $f_\epsilon^-(v_2^-(\epsilon)) = v_2^+(\epsilon)$. Пусть выполняется условие

С4. $\lambda := (f_0^-)'(0) < 1$.

Согласно [6] при достаточно малом $u_0 > 0$ траектория поля X_0^+ , начинающаяся в точке $(u, 0)$, $u \in [0, u_0)$, кончается в точке $(f_0^+(u), 0)$, где $f_0^+(\cdot) \in C^1$, $f_0^+(0) = 0$, $(f_0^+)'(0) = -\lambda$. Из симметрии следует, что при некотором $u_{00} > 0$ траектория поля X_0 , начинающаяся в точке $(u, 0)$, $u \in (0, u_{00})$, следующий раз пересекает дугу $(0, u_0) \times \{0\}$ в точке $(-f_0^+(-f_0^+(u)), 0)$.

Из свойств отображений f_0^+ и f_0^- следует, что траектории векторного поля X_0 , начинающиеся в точках достаточно малых отрицательных полуокрестностей кривых Γ^+ и Γ^- , ω -предельны соответственно к Γ^+ и Γ^- , а начинающиеся в точках достаточно малой положительной полуокрестности кривой Γ , ω -предельны к Γ (рис. 1).

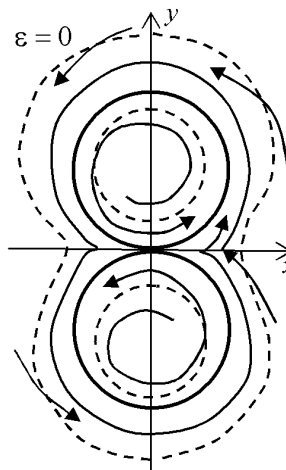


Рис. 1. Траектории поля X_0

Теорема. Пусть выполняются условия С1–С4. Тогда существуют окрестность U периодической траектории Γ и число $\delta > 0$ со следующими свойствами:

1) положительные полутраектории векторных полей X_ε , $\varepsilon \in (-\delta, \delta)^2$, начинающиеся в точках границы U , входят в U ;

2) бифуркационная диаграмма семейства X_ε , $\varepsilon \in (-\delta, \delta)^2$, в U представляет собой разбиение области параметров $(-\delta, \delta)^2$ на множества $\{(0, 0)\}$, B_i , E_i , $i = 1, 2, \dots, 9$ (рис. 2), где

$$B_1 = (0, \delta) \times \{0\}, B_4 = \{0\} \times (0, \delta), B_5 = (-\delta, 0) \times \{0\},$$

$$B_k = \{(\varepsilon_1, \varepsilon_2) : \varepsilon_1 \in (0, \delta), \varepsilon_2 = \beta_k(\varepsilon_1)\},$$

$$\beta_k : (0, \delta) \rightarrow (0, \delta), \beta_k \in C^1, \beta_k(+0) = \beta_k'(+0) = 0, k = 2, 3, \beta_1(\varepsilon_1) < \beta_2(\varepsilon_1),$$

$$B_j = \{(\varepsilon_1, \varepsilon_2) : \varepsilon_1 \in (-\delta, 0), \varepsilon_2 = \beta_j(\varepsilon_1)\},$$

$$\beta_j : (-\delta, 0) \rightarrow (-\delta, 0), \beta_j \in C^1, \beta_j(-0) = \beta_j'(-0) = 0, j = 6, 7, 8,$$

$$\beta_8(\varepsilon_1) < \beta_7(\varepsilon_1) < \beta_6(\varepsilon_1),$$

E_i – связная компонента множества $(-\delta, \delta)^2 \setminus \{(0, 0)\} \setminus B_1 \setminus \dots \setminus B_9$, граница которой содержит B_{i-1} и B_i (здесь $B_0 = B_9$).

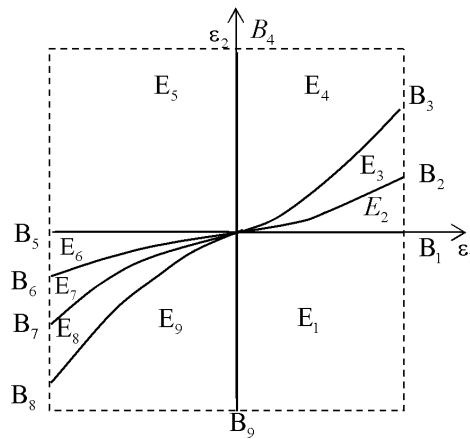


Рис. 2. Бифуркационная диаграмма

Схемы фазовых портретов векторных полей X_ε в U имеют вид, изображенный на рис. 3. Векторные поля X_ε при $\varepsilon \in E_i$ грубые в U .

Доказательство теоремы приведено в разделах 2–6.

Замечание. Случай $\lambda > 1$ сводится к случаю $\lambda < 1$ переходом к семейству векторных полей $-X_\varepsilon = (-X_\varepsilon^+, -X_\varepsilon^-)$.

2. Особые точки

Точки $O_\varepsilon^- := (-\varepsilon_1, 0)$ и $O_\varepsilon^+ := (\varepsilon_1, 0)$ – особые точки поля X_ε [1]. Обозначим $[O_\varepsilon^- O_\varepsilon^+]$ отрезок оси x между ними при $\varepsilon_1 \neq 0$. Из (1), (2) и равенства $X_\varepsilon^-(x, 0) = -X_\varepsilon^+(-x, 0)$ получаем следующие утверждения.

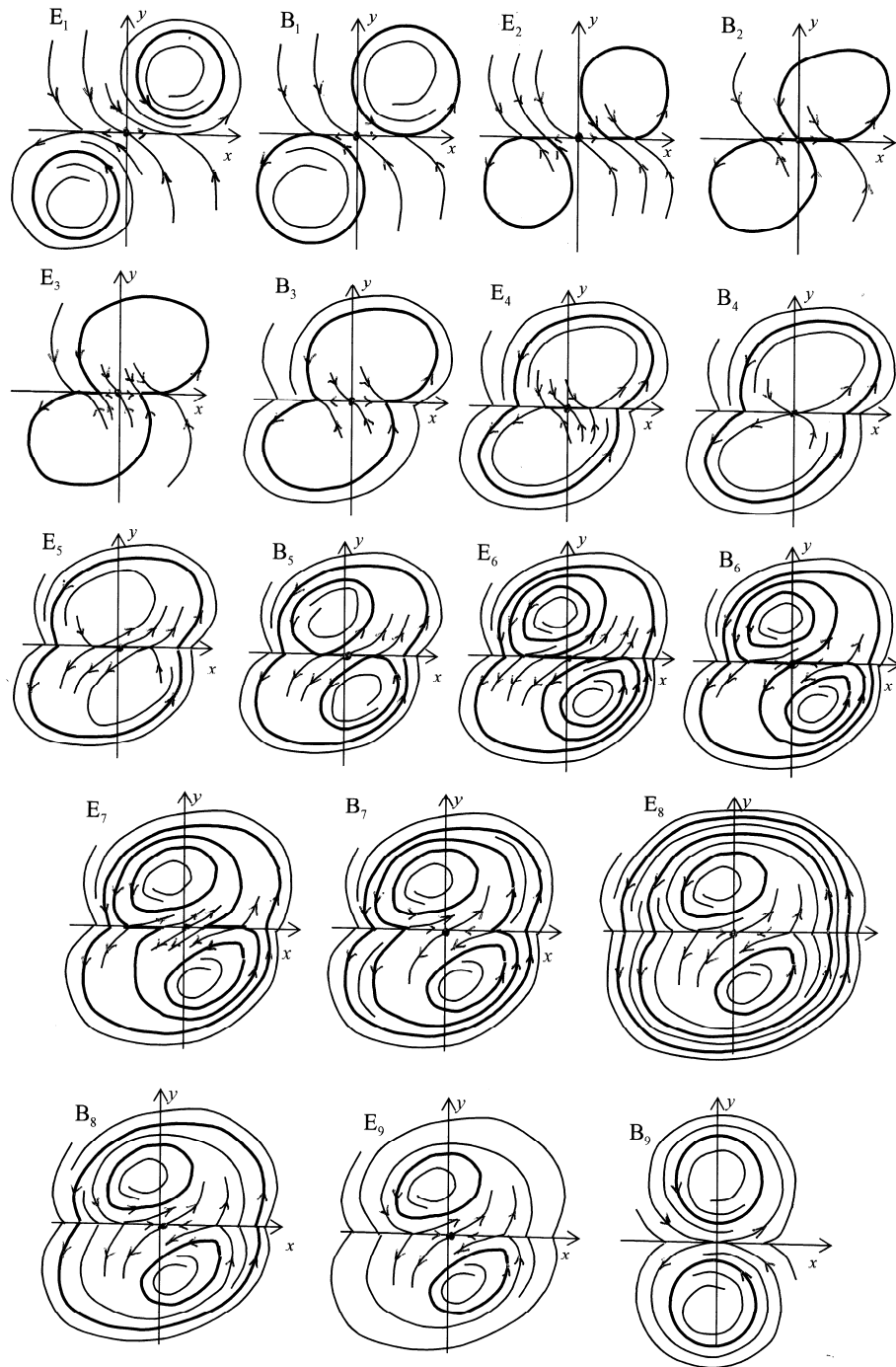


Рис. 3. Перестройки фазовых портретов

Если точка $(x, 0) \in [O_\varepsilon^- O_\varepsilon^+]$, то в выпуклой оболочке векторов $X_\varepsilon^-(x, 0)$ и $X_\varepsilon^+(x, 0)$ существует единственный вектор $X_\varepsilon^0(x, 0) = (P^0(x, \varepsilon), 0)$, $P^0 = \frac{P^- Q^+ - P^+ Q^-}{Q^+ - Q^-}$, касательный к $[O_\varepsilon^- O_\varepsilon^+]$;

$$P^0(x, \varepsilon) = 0 \Leftrightarrow x = 0;$$

$$(P^0)'_x(0, \varepsilon) = [-P^+(0, \varepsilon)(Q^+)'_x(0, \varepsilon) + (P^+)'_x(0, \varepsilon)Q^+(0, \varepsilon)] / Q^+(0, \varepsilon).$$

Поскольку $Q^+(0, 0) = 0$, то можно считать, что δ_2 было выбрано так, что в случае $\varepsilon \in (0, \delta_2) \times (-\delta_2, \delta_2)$ ($\varepsilon \in (-\delta_2, 0) \times (-\delta_2, \delta_2)$) $(P^0)'_x(0, \varepsilon) > 0$ ($(P^0)'_x(0, \varepsilon) < 0$), т.е. $O = (0, 0)$ – грубая седловая особая точка поля X_ε класса 1б [1], а дуги $[-|\varepsilon_1|, 0) \times \{0\}$ и $(0, |\varepsilon_1|] \times \{0\}$ принадлежат выходящим (входящим) сепаратрисам точки O .

3. Функции соответствия, функции последования и функции расхождения

Из С4 и равенства $f_0^-(v_2^-(0)) = v_2^-(0)$ следует, что можно считать

$$\forall \varepsilon \in (-\delta_2, \delta_2)^2 \quad \forall v \in [-\bar{v}, v_2^-(\varepsilon)] \quad (f_\varepsilon^-)'(v) < 1, \quad f_\varepsilon^-(-\bar{v}) > -\bar{v}. \quad (3)$$

Аналогично лемме 2 работы [5] получаем, что существуют числа $u_1 > 0$ и δ_3 , $0 < \delta_3 < \min\{\delta_2, u_1\}$ такие, что положительная (отрицательная) полутраектория поля X_ε^+ , $\varepsilon \in (-\delta_3, \delta_3)^2$, начинающаяся в точке $(u, 0)$, $u \in [\varepsilon_1, u_1]$ ($u \in [-u_1, \varepsilon_1]$), первый раз пересекает дугу $\eta(-1, 1)$ в точке $\eta(\chi_\varepsilon^+(u))$ ($\eta(\chi_\varepsilon^-(u))$), причем для функций соответствия $\chi_\varepsilon^\pm$ имеем равенство $\chi_\varepsilon^\pm(u) = v_2^\pm(\varepsilon) + r_\pm(u, \varepsilon)$, где $r_\pm(u, \varepsilon)$ – C^r -функции, определенные на $[-u_1, u_1] \times (-\delta_3, \delta_3)^2$ и такие, что

$$r_\pm(\varepsilon_1, \varepsilon) = (r_\pm)'_u(\varepsilon_1, \varepsilon) = 0, \quad (4)$$

$$(r_+)'_u(u, \varepsilon) > 0, \text{ если } u \in (\varepsilon_1, u_1], \quad (r_-)'_u(u, \varepsilon) < 0, \text{ если } u \in [-u_1, \varepsilon_1], \quad (5)$$

$$(r_\pm)''_{uu}(u, \varepsilon) > 0. \quad (6)$$

При некоторых $u_2 \in (0, u_1]$ и δ_4 , $0 < \delta_4 < \min\{\delta_3, u_2\}$, для любого $\varepsilon \in (-\delta_4, \delta_4)^2$ определены функция соответствия $f_\varepsilon^+(u) := (\chi_\varepsilon^-)^{-1}(\chi_\varepsilon^+(u))$, $u \in [l(\varepsilon), u_2]$, где $l(\varepsilon) = \varepsilon_1$ при $\varepsilon_2 \geq 0$ и $l(\varepsilon) = (\chi_\varepsilon^+)^{-1}(v_2^-(\varepsilon))$ при $\varepsilon_2 < 0$, и функция расхождения

$$d(u, \varepsilon) := \chi_\varepsilon^+(u) - \chi_\varepsilon^-(-u) = \varepsilon_2 + r_+(u, \varepsilon) - r_-(-u, \varepsilon), \quad u \in [|\varepsilon_1|, u_2]. \quad (7)$$

Как и в доказательстве леммы 1 [5], получаем, что

$$\lambda = -(f_0^+)'(0) = (r_+)''_{uu}(0, 0) / (r_-)''_{uu}(0, 0). \quad (8)$$

Так как $0 < \lambda < 1$, то из (7) и (8) имеем $d''_{uu}(0, 0) < 0$. Поэтому числа u_2 и δ_4 можно считать выбранными так, что для $\varepsilon \in (-\delta_4, \delta_4)^2$, $u \in [|\varepsilon_1|, u_2]$

$$d''_{uu}(u, \varepsilon) < 0. \quad (9)$$

Если $f_{\varepsilon}^{+}(u) \leq -l(\varepsilon)$, то определена функция последования $f_{\varepsilon}(u) := -f_{\varepsilon}^{+}(-f_{\varepsilon}^{+}(u))$ по траекториям поля X_{ε} . Для нее

$$\operatorname{sgn}(f_{\varepsilon}(u) - u) = \operatorname{sgn} d(u, \varepsilon). \quad (10)$$

Через точку $(u_*, 0)$, $u \in [\varepsilon_1, u_2]$, проходит периодическая траектория $\Gamma(u_*)$ поля X_{ε} тогда и только тогда, когда u_* – неподвижная точка функции последования f_{ε} . Вследствие (10) это равносильно равенству $d(u_*, \varepsilon) = 0$. Так как

$$d'_u(u_*, \varepsilon) = (\chi_{\varepsilon}^{+})'(u_*) + (\chi_{\varepsilon}^{-})'(-u_*) < 0 \Leftrightarrow$$

$$(f_{\varepsilon}^{+})'(u_*) = (\chi_{\varepsilon}^{+})'(u_*) / (\chi_{\varepsilon}^{-})'(-u_*) \in (-1, 0),$$

а $(f_{\varepsilon})'(u_*) = [(f_{\varepsilon}^{+})'(u_*)]^2$, то $\Gamma(u_*)$ – устойчивая гиперболическая периодическая траектория, если и только если $d'_u(u_*, \varepsilon) < 0$. Аналогично, $\Gamma(u_*)$ – неустойчивая гиперболическая периодическая траектория, если и только если $d'_u(u_*, \varepsilon) > 0$.

Пусть $\Gamma(u_*)$ – негиперболическая периодическая траектория, тогда

$$d'_u(u_*, \varepsilon) = 0, \quad (\chi_{\varepsilon}^{-})'(-u_*) = -(\chi_{\varepsilon}^{+})'(u_*), \quad (f_{\varepsilon}^{+})'(u_*) = -1, \quad (f_{\varepsilon})'(u_*) = 1. \quad (11)$$

Так как $(f_{\varepsilon}^{+})'(u) = (\chi_{\varepsilon}^{+})'(u) / (\chi_{\varepsilon}^{-})'(f_{\varepsilon}^{+}(u))$,

$$\begin{aligned} (f_{\varepsilon}^{+})''(u) &= (\chi_{\varepsilon}^{+})''(u) / (\chi_{\varepsilon}^{-})'(f_{\varepsilon}^{+}(u)) - \\ &- (\chi_{\varepsilon}^{+})'(u)(f_{\varepsilon}^{+})'(u)(\chi_{\varepsilon}^{-})''(f_{\varepsilon}^{+}(u)) / [(\chi_{\varepsilon}^{-})'(f_{\varepsilon}^{+}(u))]^2, \\ (f_{\varepsilon})''(u) &= (f_{\varepsilon}^{+})'(-f_{\varepsilon}^{+}(u))(f_{\varepsilon}^{+})''(u) - (f_{\varepsilon}^{+})''(-f_{\varepsilon}^{+}(u))[(f_{\varepsilon}^{+})'(u)]^2, \end{aligned}$$

то, используя (11) и (9), получаем

$$(f_{\varepsilon}^{+})''(u_*) = [(\chi_{\varepsilon}^{+})''(u_*) - (\chi_{\varepsilon}^{-})''(-u_*)] / (\chi_{\varepsilon}^{-})'(-u_*) = d''_{uu}(u_*, \varepsilon) / (\chi_{\varepsilon}^{-})'(-u_*) > 0,$$

$$(f_{\varepsilon})''(u_*) = -2(f_{\varepsilon}^{+})''(u_*) < 0.$$

Поэтому $\Gamma(u_*)$ – двойной цикл.

4. Бифуркационные кривые

Лемма. Существуют числа $\bar{u} \in (0, u_2]$, $0 < \delta < \min\{\delta_4, \bar{u}\}$ и C^r -функции $\beta_i : (-\delta, \delta) \rightarrow [0, \delta)$, $i = 2, 3$, $\beta_j : (-\delta, \delta) \rightarrow (-\delta, 0]$, $j = 5, 6, 7$, и $m : (-\delta, \delta)^2 \rightarrow (-\bar{u}, \bar{u})$ такие, что $\beta_k(0) = \beta'_k(0) = 0$ для $k = 1, 2, 5, 6, 7$, $\forall \varepsilon_1 \in (0, \delta)$ $0 < \beta_1(\varepsilon_1) < \beta_2(\varepsilon_1)$, $\forall \varepsilon_1 \in (-\delta, 0)$ $\beta_7(\varepsilon_1) < \beta_6(\varepsilon_1) < \beta_5(\varepsilon_1) < 0$, $m(0) = 0$, $\forall \varepsilon \in (-\delta, 0)^2$ $m(\varepsilon) \in (\varepsilon_1, \bar{u})$,

$$\forall \varepsilon \in (0, \delta) \times (-\delta, \delta) \quad \operatorname{sgn}[\chi_\varepsilon^+(\varepsilon_1) - \chi_\varepsilon^-(0)] = \operatorname{sgn}(\varepsilon_2 - \beta_2(\varepsilon_1)), \quad (12)$$

$$\forall \varepsilon \in [0, \delta) \times (-\delta, \delta) \quad \operatorname{sgn} d(\varepsilon_1, \varepsilon) = \operatorname{sgn}(\varepsilon_2 - \beta_3(\varepsilon_1)). \quad (13)$$

$$\forall \varepsilon \in (-\delta, 0) \times (-\delta, \delta) \quad \operatorname{sgn}[\chi_\varepsilon^+(0) - \chi_\varepsilon^-(\varepsilon_1)] = \operatorname{sgn}(\varepsilon_2 - \beta_6(\varepsilon_1)), \quad (14)$$

$$\forall \varepsilon \in (-\delta, 0) \times (-\delta, \delta) \quad \operatorname{sgn} d(-\varepsilon_1, \varepsilon) = \operatorname{sgn}(\varepsilon_2 - \beta_7(\varepsilon_1)), \quad (15)$$

$$\forall \varepsilon \in (-\delta, 0)^2 \quad \forall u \in [\varepsilon_1, \bar{u}] \quad \operatorname{sgn} d'_u(u, \varepsilon) = \operatorname{sgn}(m(\varepsilon) - u), \quad (16)$$

$$\forall \varepsilon \in (-\delta, 0)^2 \quad \operatorname{sgn} d(m(\varepsilon), \varepsilon) = \operatorname{sgn}(\varepsilon_2 - \beta_8(\varepsilon_1)). \quad (17)$$

Доказательство. Функцию d продолжим до C^r -функции

$$\bar{d}(u, \varepsilon) := \varepsilon_2 + r_+(u, \varepsilon) - r_-(-u, \varepsilon), \quad (u, \varepsilon) \in [-u_2, u_2] \times (-\delta_4, \delta_4)^2.$$

Так как $\bar{d}(\varepsilon_1, \varepsilon) = \varepsilon_2 - r_-(-\varepsilon_1, \varepsilon) = \varepsilon_2 + \varepsilon_1 \int_{-1}^1 (r_-)'_u(t\varepsilon_1, \varepsilon) dt$, то $\bar{d}(0, 0)$, $\frac{\partial}{\partial \varepsilon_2} \bar{d}(\varepsilon_1, \varepsilon)|_{\varepsilon=0} = 1$, $\frac{\partial}{\partial \varepsilon_1} \bar{d}(\varepsilon_1, \varepsilon)|_{\varepsilon=0} = 2(r_-)'_u(0, 0) = 0$. Теперь, используя теорему о неявной функции и учитывая, что при $\varepsilon_1 > 0$ $\bar{d}(\varepsilon_1, \varepsilon) = d(\varepsilon_1, \varepsilon)$, получаем существование C^r -функции $\beta_3 : (-\delta, \delta) \rightarrow (-\delta, \delta)$, $\delta \in (0, \delta_4)$, удовлетворяющей условиям $\beta_3(0) = \beta'_3(0) = 0$ и (13).

Равенства (12), (14) и (15) доказываются аналогично.

При $\varepsilon_1 > 0$ из (12) получаем $\operatorname{sgn} \beta_2(\varepsilon_1) = \operatorname{sgn}[\chi_\varepsilon^-(0) - \chi_\varepsilon^+(\varepsilon_1)]|_{\varepsilon_2=0}$. Так как $[\chi_\varepsilon^-(0) - \chi_\varepsilon^+(\varepsilon_1)]|_{\varepsilon_2=0} > [\chi_\varepsilon^-(\varepsilon_1) - \chi_\varepsilon^+(\varepsilon_1)]|_{\varepsilon_2=0} = 0$, то $\beta_2(\varepsilon_1) > 0$.

При $\varepsilon_1 > 0$ $\chi_\varepsilon^+(\varepsilon_1) - \chi_\varepsilon^-(0) > \chi_\varepsilon^+(\varepsilon_1) - \chi_\varepsilon^-(\varepsilon_1) = d(\varepsilon_1, \varepsilon)$. Отсюда, из (12) и (13) получаем $\beta_2(\varepsilon_1) < \beta_3(\varepsilon_1)$. Аналогично доказываются неравенства $\beta_7(\varepsilon_1) < \beta_6(\varepsilon_1) < 0$.

Так как $\bar{d}'_u(0, 0) = d'_u(0, 0) = 0$, $\bar{d}''_{uu}(0, 0) = d''_{uu}(0, 0) < 0$, то числа $\bar{u}$ и δ можно считать выбранными так, что $\bar{u} \in (0, u_2]$ $0 < \delta < \min\{\delta_4, \bar{u}\}$ и

$$\forall \varepsilon \in (-\delta, \delta)^2 \quad \forall u \in [-\bar{u}, \bar{u}] \quad \operatorname{sgn} \bar{d}'_u(u, \varepsilon) = \operatorname{sgn}(m(\varepsilon) - u), \quad (18)$$

где $m : (-\delta, \delta)^2 \rightarrow (-\bar{u}, \bar{u})$ — C^r -функция, $m(0) = 0$. Вследствие (4) при $\varepsilon_1 < 0$ $\bar{d}'_u(-\varepsilon_1, \varepsilon) = (r_+)'_u(-\varepsilon_1, \varepsilon) > 0$. Отсюда и из (18) имеем

$$\forall \varepsilon \in (-\delta, 0)^2 \quad m(\varepsilon) > -\varepsilon_1. \quad (19)$$

Используя равенство (4), получаем

$$\begin{aligned} \bar{d}(m(\varepsilon), \varepsilon) &= \varepsilon_2 + r_+(m(\varepsilon), \varepsilon) - r_-(-m(\varepsilon), \varepsilon) = \\ &= \varepsilon_2 + (m(\varepsilon) - \varepsilon_1) \int_0^1 (r_+)'_u(\varepsilon_1 + t(m(\varepsilon) - \varepsilon_1), \varepsilon) dt + \end{aligned}$$

$$+(m(\varepsilon) + \varepsilon_1) \int_0^1 (r_-)'_u(\varepsilon_1 - t(m(\varepsilon) + \varepsilon_1), \varepsilon) dt ,$$

Отсюда, из равенств $m(0)=0$ и (4) имеем $\frac{\partial}{\partial \varepsilon_2} \bar{d}(m(\varepsilon), \varepsilon)|_{\varepsilon=0} = 1$, $\frac{\partial}{\partial \varepsilon_1} \bar{d}(m(\varepsilon), \varepsilon)|_{\varepsilon=0} = 0$. Теперь по теореме о неявной функции получаем, что при достаточно малом δ существует такая C^r -функция $\beta_8 : (-\delta, \delta) \rightarrow (-\delta, \delta)$, что $\beta_8(0) = \beta'_8(0) = 0$, $\forall \varepsilon \in (-\delta, \delta)^2$ $\text{sgn} \bar{d}(m(\varepsilon), \varepsilon) = \text{sgn}(\varepsilon_2 - \beta_8(\varepsilon_1))$. Ввиду (19) при $\varepsilon \in (-\delta, 0)^2$ получаем $\bar{d}(m(\varepsilon), \varepsilon) = d(m(\varepsilon), \varepsilon)$, т.е. имеем и равенство (16).

Из (19), (16) и (15) получаем при $\varepsilon_1 \in (-\delta, 0)$, $\varepsilon_2 = \beta_7(\varepsilon_1)$ $d(m(\varepsilon), \varepsilon) > d(-\varepsilon_1, \varepsilon) = 0$. Отсюда и из (14) следует, что $\forall \varepsilon_1 \in (-\delta, 0)$ $\beta_8(\varepsilon_1) < \beta_7(\varepsilon_1)$. Лемма доказана.

Из равенств $d(0, 0) = 0$, $d'_u(0, 0) = 0$ и неравенства (9) следует, что $d(\bar{u}, 0) < 0$ и $d'_u(\bar{u}, 0) < 0$. Поэтому δ можно считать столь малым, что

$$\forall \varepsilon \in (-\delta, \delta)^2 \quad d(\bar{u}, \varepsilon) < 0 \text{ и } d'_u(\bar{u}, \varepsilon) < 0. \quad (20)$$

5. Окрестность контура Γ

Так как $f_0(\bar{u}) < \bar{u}$, а $f_0^-(\bar{v}) > -\bar{v}$, то аналогично [5, 6] можно построить окрестность U контура Γ , не содержащую особых точек векторных полей $X_0^\pm$, с границей $\partial U = \gamma_{\text{int}}^+ \cup \gamma_{\text{int}}^- \cup \gamma_{\text{ext}}$ (на рис. 1 она изображена пунктиром), где γ_{int}^+ – простая гладкая замкнутая кривая, проходящая через точку $\eta(f_0^-(\bar{v}))$, $\gamma_{\text{int}}^- = S\gamma_{\text{int}}^+$, в точках которой поле X_0^+ направлено внутрь U , $\gamma_{\text{int}}^- = S\gamma_{\text{int}}^+$, $\gamma_{\text{ext}} = \gamma_{\text{ext}}^+ \cup S\gamma_{\text{ext}}^+$, где γ_{ext}^+ – гладкая дуга, концы которой $(-f_0^-(\bar{u}), 0)$ и $(f_0^-(\bar{u}), 0)$, причем в точках дуги γ_{ext}^+ поле X_0^+ направлено внутрь U . Считая δ достаточно малым, получим, что в точках ∂U траектории поля X_ε , $\varepsilon \in (-\delta, \delta)^2$, входят внутрь U .

6. Перестройки фазовых портретов

Определим множества E_i и B_i так, как указано в формулировке теоремы.

Найдем периодические траектории и сепаратрисные контуры полей X_ε .

При $\varepsilon \in (-\delta, \delta) \times (-\delta, 0)$ из (3) получаем, что f_ε^- имеет на $(-\bar{v}, v_2^-(\varepsilon)]$ единственную неподвижную точку $v_*(\varepsilon) \in (-\bar{v}, v_2^-(\varepsilon))$. Через точку $\eta(v_*(\varepsilon))$ проходит устойчивая гиперболическая периодическая траектория Γ_ε^+ . При $\varepsilon \in B_1 \cup B_5$ f_ε^- имеет на $(-\bar{v}, v_2^-(\varepsilon)]$ единственную неподвижную точку $v_2^-(\varepsilon) = v_2^+(\varepsilon)$. Через нее проходит периодическая траектория Γ_ε^+ . В обоих случаях $\Gamma_\varepsilon^- = S\Gamma_\varepsilon^+$ также периодическая траектория.

При $\varepsilon \in E_2$ из (12) следует, что $0 < f_\varepsilon^+(\varepsilon_1) < \varepsilon_1$. Поэтому через точку O_ε^+ проходит периодическая траектория Γ_ε^+ , состоящая из отрезка $[f_\varepsilon^+(\varepsilon_1), \varepsilon_1] \times \{0\}$ и дуги траектории поля X_ε^+ между концами этого отрезка. Она устойчива – траектории, выходящие из точек достаточно малой окрестности Γ_ε^+ начиная с некоторого момента времени совпадают с Γ_ε^+ . Кроме того, имеется симметричная периодическая траектория $\Gamma_\varepsilon^- = S\Gamma_\varepsilon^+$.

При $\varepsilon \in B_2$ вследствие (12) $f_\varepsilon^+(\varepsilon_1) = 0$. Поэтому выходящая сепаратриса седла O , проходящая через точку O_ε^+ (O_ε^-), при возрастании времени кончается в точке O , образуя петлю Γ_ε^+ ($\Gamma_\varepsilon^- = S\Gamma_\varepsilon^+$).

При $\varepsilon \in E_3$ из (12) и (13) следует, что $-\varepsilon_1 < f_\varepsilon^+(\varepsilon_1) < 0$. Поэтому через точку O_ε^+ проходит периодическая траектория Γ_ε , состоящая из отрезков $[-\varepsilon_1, f_\varepsilon^+(\varepsilon_1)] \times \{0\}$, $[-f_\varepsilon^+(\varepsilon_1), \varepsilon_1] \times \{0\}$, дуги траектории поля X_ε^+ между точками O_ε^+ и $(f_\varepsilon^+(\varepsilon_1), 0)$, а также дуги траектории поля X_ε^- между точками O_ε^- и $(-f_\varepsilon^+(\varepsilon_1), 0)$. При $\varepsilon \in B_3$ вследствие (13) $f_\varepsilon^+(\varepsilon_1) = -\varepsilon_1$. Это означает, что через точку O_ε^+ проходит периодическая траектория Γ_ε , состоящая из дуги траектории поля X_ε^+ между точками O_ε^+ и O_ε^- и симметричной ей дуги траектории поля X_ε^- .

При $\varepsilon \in E_6$ из (14) следует, что $\varepsilon_1 < (f_\varepsilon^+)^{-1}(\varepsilon_1) < 0$. Поэтому через точку O_ε^- проходит периодическая траектория Γ_ε^+ , состоящая из отрезка $[\varepsilon_1, (f_\varepsilon^+)^{-1}(\varepsilon_1)] \times \{0\}$ и дуги траектории поля X_ε^+ между концами этого отрезка. Она неустойчива – отрицательные полутраектории, выходящие из точек достаточно малой окрестности Γ_ε^+ начиная с некоторого момента времени совпадают с Γ_ε^+ . Кроме того, поле имеет симметричную периодическую траекторию $\Gamma_\varepsilon^- = S\Gamma_\varepsilon^+$.

При $\varepsilon \in B_6$ имеем $f_\varepsilon^+(0) = \varepsilon_1$. Поэтому входящая сепаратриса седла O , проходящая через точку O_ε^+ (O_ε^-), при убывании времени кончается в точке O , образуя петлю Γ_ε^+ ($\Gamma_\varepsilon^- = S\Gamma_\varepsilon^+$).

При $\varepsilon \in E_7$ из (14) и (15) следует, что $0 < (f_\varepsilon^+)^{-1}(\varepsilon_1) < -\varepsilon_1$. Поэтому через точку O_ε^+ проходит периодическая траектория $\Gamma_\varepsilon = S\Gamma_\varepsilon$, состоящая из отрезков $[(f_\varepsilon^+)^{-1}(\varepsilon_1), -\varepsilon_1] \times \{0\}$, $[\varepsilon_1, -(f_\varepsilon^+)^{-1}(\varepsilon_1)] \times \{0\}$ дуги траектории поля X_ε^+ между точками O_ε^+ и $((f_\varepsilon^+)^{-1}(\varepsilon_1), 0)$, а также дуги траектории поля X_ε^- между точками O_ε^- и $(-(f_\varepsilon^+)^{-1}(\varepsilon_1), 0)$. Она неустойчива – отрицательные по-

лутраектории, выходящие из точек достаточно малой окрестности Γ_ε , начиная с некоторого момента времени совпадают с Γ_ε .

При $\varepsilon \in E_i$ ($i = 4, 5, 6, 7$) и $\varepsilon \in B_j$ ($j = 4, 5, 6$) из (20), (13), (15) и (9) следует, что $d(\cdot, \varepsilon)$ имеет на $[\varepsilon_1, \bar{u}]$ единственный нуль $u_* \in (\varepsilon_1, \bar{u})$, в котором $d'_u(u_*, \varepsilon) < 0$. Тем самым через точки $(u_*, 0)$ и $(-u_*, 0)$ проходит устойчивая гиперболическая периодическая траектория.

При $\varepsilon \in B_7$ (соответственно при $\varepsilon \in E_8$) из (15) следует, что $d(-\varepsilon_1, \varepsilon) = 0$ (соответственно $d(-\varepsilon_1, \varepsilon) > 0$). При этом $d'_u(-\varepsilon_1, \varepsilon) = (r_+)'_u(-\varepsilon_1, \varepsilon) > 0$. Учитывая (16), (17) и (20), получаем, что $d(\cdot, \varepsilon)$ имеет на $[-\varepsilon_1, \bar{u}]$ два нуля: $u_l(\varepsilon) = -\varepsilon_1$ (соответственно $u_l(\varepsilon) > -\varepsilon_1$) и $u_r(\varepsilon)$ ($u_l(\varepsilon) < u_r(\varepsilon) < \bar{u}$), при этом $d'_u(u_l, \varepsilon) > 0$, а $d'_u(u_r, \varepsilon) < 0$. Тем самым отрезок $[-\varepsilon_1, \bar{u}] \times \{0\}$ пересекают две периодические траектории, неустойчивая (соответственно неустойчивая гиперболическая) $\Gamma(u_l(\varepsilon))$, и устойчивая гиперболическая $\Gamma(u_r(\varepsilon))$.

При $\varepsilon \in B_8$ из (16), (17) и (9) следует, что $d(\cdot, \varepsilon)$ имеет на $[-\varepsilon_1, \bar{u}]$ единственный нуль $u_*(\varepsilon) \in (-\varepsilon_1, \bar{u})$, при этом $d'_u(u_*(\varepsilon), \varepsilon) = 0$, $d''_{uu}(u_*(\varepsilon), \varepsilon) < 0$. Поэтому отрезок $[-\varepsilon_1, \bar{u}] \times \{0\}$ пересекает единственная периодическая траектория $\Gamma(u_*(\varepsilon))$ – двойной цикл.

Нетрудно убедиться, что других периодических траекторий, кроме перечисленных выше, у векторных полей X_ε , $\varepsilon \in (-\delta, \delta)^2$, нет, а все другие траектории ведут себя, как указано на рис. 3. Покажем это, например, при $\varepsilon \in E_1$. Остальные случаи рассматриваются аналогично.

Пусть $\varepsilon \in E_1$. Тогда траектории, начинающиеся в точках кольцевой области C_ε^+ ($C_\varepsilon^- = SC_\varepsilon^+$), ограниченной Γ_ε^+ и γ_{int}^+ (Γ_ε^- и γ_{int}^-), ω -предельны к Γ_ε^+ (Γ_ε^-) и выходят из U при убывании времени в точках γ_{int}^+ (γ_{int}^-). Обозначим L_ε^+ (L_ε^-) отрицательную полутраекторию поля X_ε , начинающуюся в точке O , как полутраектория поля X_ε^+ (X_ε^-). Вследствие (12) L_ε^+ проходит через точку $((f_\varepsilon^+)^{-1}(0), 0)$, $(f_\varepsilon^+)^{-1}(0) \in (\varepsilon_1, \bar{u})$. Из (13), (20) и (9) получаем, что $\forall u \in [\varepsilon_1, \bar{u}]$ $d(u, \varepsilon) < 0$. Теперь из (10) следует, что $\forall u \in [\varepsilon_1, \bar{u}]$ $(f_\varepsilon)^{-1}(u) > u$, а потому L_ε^+ пересекается с γ_{ext} в точке, которую обозначим A_ε . Тогда L_ε^- пересекается с γ_{ext} в точке SA_ε . Периодическая траектория Γ_ε^+ и простая замкнутая кривая, состоящая из дуги $L_\varepsilon^+ \cup L_\varepsilon^-$ между точками A_ε и SA_ε и одной из дуг γ_{ext} между этими точками, ограничивают область K_ε . Траектории, начинающиеся в точках K_ε^+ ($K_\varepsilon^- = SK_\varepsilon^+$) ω -предельны к Γ_ε^+ (Γ_ε^-) и выходят из U при убывании времени в точках γ_{ext} . Поскольку окрестность U является объединением областей $C_\varepsilon^\pm$, $K_\varepsilon^\pm$ и точек, лежащих

на периодических траекториях $\Gamma_{\varepsilon}^{\pm}$ и сепаратрисах $L_{\varepsilon}^{\pm}$, то мы описали поведение всех траекторий, начинающихся в точках U .

Грубость векторных полей X_{ε} , $\varepsilon \in E_i$ ($i = 1, 2, \dots, 9$), в U следует из полученного описания траекторий в U и достаточных условий грубости [1].

Список литературы

1. Филиппов А. Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М. : Наука, 1985. 224 с.
2. Simpson D. J. W. Bifurcations in piecewise-smooth continuous dynamical systems. World Scientific, 2010. 238 p.
3. Guardia M., Seara T. M., Teixeira M. A. Generic bifurcations of low codimension of planar Filippov systems // J. Differential Equations. 2011. Vol. 250, № 4. P. 1967–2023.
4. Advances in Nonsmooth Dynamics. Trends in Mathematics: Research Perspectives CRM Barcelona / ed. by A. Colombo, M. R. Jeffrey, J. T. Lazaro, J. M. Olm. Springer, 2016.
5. Ройтенберг В. Ш. О бифуркациях периодической траектории «восьмерка» кусочно-гладкого векторного поля с симметрией // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. 2020. № 3. С. 98–113.
6. Ройтенберг В. Ш. О бифуркациях сшитого тройного цикла // Математика и математическое образование. Теория и практика : межвуз. сб. науч. тр. Вып. 9. Ярославль : Изд-во ЯГТУ, 2014. С. 54–67.

References

1. Filippov A.F. *Differentsial'nye uravneniya s razryvnoy pravoy chast'yu = Differential equations with discontinuous right side*. Moscow: Nauka, 1985:224. (In Russ.)
2. Simpson D.J.W. *Bifurcations in piecewise-smooth continuous dynamical systems*. Word Scientific, 2010:238.
3. Guardia M., Seara T.M., Teixeira M.A. Generic bifurcations of low codimension of planar Filippov systems. *J. Differential Equations*. 2011;250(4):1967–2023.
4. Colombo A., Jeffrey M. R., Lazaro J. T., Olm J. M. (eds.). *Advances in Nonsmooth Dynamics. Trends in Mathematics: Research Perspectives CRM Barcelona*. Springer, 2016.
5. Roytenberg V.Sh. On bifurcations of the “figure-eight” periodic trajectory of a piecewise-smooth vector field with symmetry. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiziko-matematicheskie nauki = University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences*. 2020;(3):98–113. (In Russ.)
6. Roytenberg V.Sh. On bifurcations of the linked ternary cycle. *Matematika i matematicheskoe obrazovanie. Teoriya i praktika: mezhvuz. sb. nauch. tr. Vyp. 9. = Mathematics and mathematics education. Theory and practice: university proceedings. Issue 9*. Yaroslavl: Izd-vo YaGTU, 2014:54–67. (In Russ.)

Информация об авторах / Information about the authors

Владимир Шлеймович Ройтенберг

кандидат физико-математических наук,
доцент, доцент кафедры высшей
математики, Ярославский
государственный технический
университет (Россия, г. Ярославль,
Московский проспект, 88)

E-mail: vroitenberg@mail.ru

Vladimir Sh. Roytenberg

Candidate of physical and mathematical
sciences, associate professor, associate
professor of the sub-department of higher
mathematics, Yaroslavl State Technical
University (88 Moskovskiy avenue,
Yaroslavl, Russia)

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов / The authors declare no conflicts of interests.

Поступила в редакцию / Received 27.04.2021

Поступила после рецензирования и доработки / Revised 15.06.2021

Принята к публикации / Accepted 28.07.2021